SYARAT PERLU DAN SYARAT CUKUP SOLUSI POSITIF EVENTUAL SISTEM PERSAMAAN DIFERENSIAL LINIER HOMOGEN ORDE SATU

Yulian Sari
Prodi Pendidikan Matematika Universitas Riau Kepulauan

ABSTRAK

Artikel ini mengkaji solusi atau penyelesaian sistem persamaan differensial linier homogen orde satu

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t), \qquad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \tag{1}$$

dimana $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\mathbf{x} : [0,\infty) \to \mathbb{R}^n$ yaitu $\mathbf{x}(t)$ agar selalu bernilai nonnegatif. Untuk sistem (1) dengan $\mathbf{x}_0 \geqslant 0$, jika matriks A adalah eksponensial positif eventual, maka solusi $\mathbf{x}(t)$ untuk sistem tersebut dinamakan sebagai solusi positif eventual. Sifat-sifat agar matriks A adalah matriks eksponensial positif eventual digunakan dalam pembahasan. Artikel ini merupakan kajian kembali tentang syarat cukup dan menambahkan hasil analisis tentang syarat perlu agar solusi $\mathbf{x}(t)$ adalah solusi positif eventual dengan $\mathbf{x}_0 \geqslant 0$ adalah $A + aI$ adalah matriks positif eventual untuk suatu $a \geq 0$.

Kata Kunci : *solusi positif eventual, matrik eksponensial positif eventual, differensial linier homogen orde satu.*

1. Latar Belakang

Diberikan suatu sistem persamaan diferensial linier homogen orde satu sebagai berikut.

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t), \qquad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \tag{1}$$

dimana $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\mathbf{x} : [0,\infty) \to \mathbb{R}^n$, dan $\dot{\mathbf{x}} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} \end{bmatrix}$. Dalam literatur [2] dinyatakan bahwa solusi sistem (1) adalah

$$\mathbf{x}(t) = e^{tA}\mathbf{x}_0. \tag{2}$$

Perlu diperhatikan bahwa solusi (2) dapat bernilai nonnegatif atau negatif. Salah satu cara agar $\mathbf{x}(t)$ bernilai nonnegatif adalah $e^{tA} \succ 0$ dan $\mathbf{x}_0 \geqslant 0$. Dalam situasi tertentu, e^{tA} tidak selalu positif untuk setiap $t \geq 0$. Matriks $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ yang mempunyai sifat ada $t_0 \in [0,\infty)$ sedemikian sehingga $e^{tA} \succ 0 \ \forall\, t \geq t_0$ disebut sebagai matriks eksponensial positif eventual [2]. Untuk sistem (1) dengan $\mathbf{x}_0 \geqslant 0$, jika matriks A adalah eksponensial positif eventual, maka solusi $\mathbf{x}(t)$ untuk sistem tersebut dinamakan sebagai solusi positif eventual [3].

Syarat cukup bagi solusi sistem (1) adalah solusi positif eventual telah dikaji dalam [1]. Tulisan ini memaparkan kembali syarat cukup tersebut dan menambahkan syarat perlu agar solusi sistem (1) adalah solusi positif eventual.

2. Notasi dan Definisi

Definisi 1. [1] *Untuk sebarang matriks* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$,

$$e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tA)^k}{k!} = I + tA + \frac{(tA)^2}{2!} + \frac{(tA)^3}{3!} + \cdots$$

didefinisikan sebagai matriks eksponensial dari A, dimana $t \in \mathbb{R}$*, dan* $I \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *adalah matriks identitas.*

Definisi 2. [2] *Misalkan* $A = \left[a_{ij}\right] \in \mathbb{R}^{n\times n}$*. Matriks A dikatakan:*

1. *positif, ditulis* $A \succ 0$*, jika* $a_{ij} > 0$ *untuk setiap i dan j*
2. *nonnegatif, ditulis* $A \succcurlyeq 0$*, jika* $a_{ij} \geq 0$ *untuk setiap i dan j*
3. *nonnegatif eventual, dinotasikan dengan* $A \succcurlyeq_v 0$*, jika terdapat bilangan bulat positif* k_0 *sedemikian sehingga* $A^k \succcurlyeq 0$ *untuk setiap* $k \geq k_0$*. Bilangan bulat positif terkecil* $k_0 = k_0(A)$ *disebut sebagai indeks pangkat dari A*
4. *positif eventual, dinotasikan dengan* $A \succ_v 0$*, jika terdapat bilangan bulat positif* k_0 *sedemikian sehingga* $A^k \succcurlyeq 0$ *untuk setiap* $k \geq k_0$*. Bilangan bulat positif terkecil* $k_0 = k_0(A)$ *disebut sebagai indeks pangkat dari A.*
5. *nonnegatif eksponensial, jika*
$$e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!} \succcurlyeq 0 \;\; \forall\, t \geq 0,$$
6. *positif eksponensial, jika*
$$e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!} \succ 0 \;\; \forall\, t > 0,$$
7. *eksponensial nonnegatif eventual, jika* $\exists t_0 \in [0, \infty)$ *sedemikian sehingga* $e^{tA} \succcurlyeq 0$*,* $\forall t \geq t_0$
8. *eksponensial positif eventual, jika* $\exists t_0 \in [0, \infty)$ *sedemikian sehingga* $e^{tA} \succ 0, \forall t \geq t_0$.

3. Pembahasan dan Hasil

Teorema 1. [2] *Misalkan* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$*. Pernyataan berikut ekivalen:*

(i) $A + aI$ *merupakan matriks positif eventual untuk suatu* $a \geq 0$*.*

(ii) A *merupakan matriks eksponensial positif eventual.*

Teorema 2. *Misalkan diberikan sistem* $\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t)$ *dengan syarat awal* $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$*. Matriks* $A + aI$ *adalah matriks positif eventual untuk suatu* $a \geq 0$ *jika dan hanya jika solusi* $\mathbf{x}(t)$ *untuk sistem tersebut adalah positif eventual untuk setiap* $\mathbf{x}_0 \succcurlyeq 0$*.*

Bukti

($\Rightarrow$) [3] Misalkan $A + aI$ adalah matriks positif eventual untuk suatu $a \geq 0$, maka berdasarkan Teorema 1, matriks A adalah matriks eksponensial positif eventual. Akibatnya $\exists\, t_0 \in [0, \infty)$ sedemikian sehingga $\mathrm{e}^{tA} \succ 0 \;\; \forall\, t \geq t_0$. Karena $\mathbf{x}_0 \succcurlyeq 0$,

maka
$$\mathbf{x}(t) = \mathrm{e}^{tA}\mathbf{x}_0 \succ 0 \;\; \forall\, t \geq t_0.$$

Sehingga solusi sistem $\dot{\mathbf{x}}(\mathrm{t}) = A\mathbf{x}(\mathrm{t})$ dengan syarat awal $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ adalah positif eventual.

($\Leftarrow$) Misalkan $\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t)$ dengan syarat awal $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ dan solusi $\mathbf{x}(t)$ adalah solusi positif eventual, maka berdasarkan definisi pada latar belakang, mestilah A adalah matriks eksponensial positif eventual. Karena A adalah matriks eksponensial positif eventual, berdasarkan Teorema 1, maka $A + aI$ adalah matriks positif eventual untuk suatu $a \geq 0$.

Akibatnya, terbukti bahwa matriks $A + a\mathrm{I}$ adalah matriks positif eventual untuk suatu $a \geq 0$ jika dan hanya jika solusi $\mathbf{x}(\mathrm{t})$ untuk sistem tersebut adalah positif eventual untuk setiap $\mathbf{x}_0 \geqslant 0$. ■

4. Kesimpulan

Berdasarkan uraian yang telah dibuat dan dibahas, maka syarat cukup dan syarat perlu agar solusi sistem $\dot{\mathbf{x}}(\mathrm{t}) = A\mathbf{x}(\mathrm{t})$ dengan syarat awal $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \geqslant 0$ positif eventual adalah matriks $A + aI$ positif eventual untuk suatu $a \geq 0$.

5. Referensi

[1] Boyce, W. E dan R. C. Diprima. 2001. *Elementary Differential Equation and Boundary Value Problems. Eight edition*. John Wiley. New York.
[2] Noutsos, D. dan M. J. Tsatsomeros. 2008. Reachability and Holdability of Nonnegative States. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*. 30:700-712.
[3] Sari, Yulian. 2011. Solusi Positif Eventual Sistem Persamaan Differensial Linier Homogen Orde Satu. *Prosiding, Seminar Nasional Matematika yang diselenggarakan oleh FMIPA Unand, tanggal 21 Juni 2011*. Padang: Universitas Andalas.