SUATU KRITERIA STABILISASI SISTEM DESKRIPTOR LINIER KONTINU REGULAR

Yulian Sari

Prodi Pendidikan Matematika FKIP Universitas Riau Kepulauan Batam
Korespondensi: yuliansari17@gmail.com

Abstract.
The regular descriptor linear time-invariant system, or shorthandly this system is denoted by $[E,A,B][E,A,B]$ are used in many applications, especially in mathematical modeling for engineering, biology, and economics. In this paper, the characterization of stabilization of this systems. Feedback control $\mathbf{u}(t) = K\mathbf{x}(t) + \mathbf{w}(t)$ for some $K \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ and $\mathbf{w}(t) \in \mathbb{R}^m$ is used for stabilizing the system $[E,A,B]$ such that the closed-loop system $E\dot{\mathbf{x}}(t) = (A+BK)\mathbf{x}(t) + B\mathbf{w}(t)$ is stable. Some examples is given to illustrate this characteristic.

Keywords: *regular descriptor linear time-invariant system, stabilization, stabilizable.*

PENDAHULUAN

Diberikan suatu sistem persamaan diferensial orde satu sebagai berikut.

$$E\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t), \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \tag{1}$$

dimana $E, A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), B \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$. Pada persamaan di atas, $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ menyatakan variabel keadaan, $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$ adalah variabel kontrol (input), dan $t \in \mathbb{R}_+$ menyatakan waktu. Sistem (1) sering disebut sebagai sistem deskriptor linier kontinu [2,6]. Secara ringkas, sistem (1) ditulis sebagai $[E,A,B]$. Sistem ini sering dijumpai sebagai model untuk beberapa masalah, terutama dalam bidang rekayasa, biologi, dan ekonomi. [1,2,5,6].

Jika E adalah matriks nonsingular, maka sistem (1) dapat ditulis sebagai berikut.

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \bar{A}\mathbf{x}(t) + \bar{B}\mathbf{u}(t), \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \tag{2}$$

dimana $\bar{A} = E^{-1}A$ dan $\bar{B} = E^{-1}B$, yang merupakan sistem linier standar. Solusi sistem (2) diberikan sebagai berikut.

$$\mathbf{x}(t) = \mathrm{e}^{\bar{A}t}\mathbf{x}(0) + \mathrm{e}^{\bar{A}t}\int_0^t \mathrm{e}^{-\bar{A}\tau}\bar{B}u(\tau)d\tau$$

Jika E adalah matriks singular, sistem (1) mungkin tidak mempunyai solusi. Dalam [1,3] dinyatakan bahwa sistem (1), dengan $\text{rank}(E) < n$, memiliki solusi tunggal jika $\det(\lambda E + A) \neq 0$ untuk suatu $\lambda \in \mathbb{C}$. Untuk selanjutnya, sistem (1) dengan $\det(\lambda E + A) \neq 0$ untuk suatu $\lambda \in \mathbb{C}$ disebut sistem deskriptor regular. Pada [6] dinyatakan bahwa solusi sistem deskriptor linier regular (1) adalah

$$\mathbf{x}(t) = e^{E^D At} E^D E\mathbf{v} + \int_0^t e^{E^D A(t-\tau)} E^D B\mathbf{u}(\tau)d\tau - (I - E^D E)\sum_{i=0}^{q-1}(E^D A)^i A^D B\mathbf{u}^{(i)}(t)$$

untuk suatu $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, q adalah indeks matriks E, dan $\mathbf{u}(t) \in C^q$ yang memenuhi $\mathbf{u}^{(i)}(\tau) \geqslant \mathbf{0}, i = 0, \cdots, q-1$ dan $0 \leq \tau \leq t$ dan untuk setiap kondisi awal konsisten $\mathbf{x}_0 \geqslant \mathbf{0}$.

Salah satu kriteria kestabilan sistem (1) adalah bagian riil dari semua nilai eigen pasangan matriks (E, A) bernilai negatif. Sistem (1) dikatakan dapat distabilkan (*stabilizable*) jika terdapat kontrol *feedback* $\mathbf{u}(t) = K\mathbf{x}(t) + \mathbf{w}(t)$ untuk suatu $K \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ dan $\mathbf{w}(t) \in \mathbb{R}^m$ sedemikian sehingga sistem loop tertutup

$$E\dot{\mathbf{x}}(t) = (A + BK)\mathbf{x}(t) + B\mathbf{w}(t) \tag{3}$$

adalah stabil [1,2]. Dalam hal ini, vektor $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$ dikatakan kontrol yang menstabilkan sistem (1). Pada artikel ini akan dipaparkan kembali dengan contoh bahwa eksitensi $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$ sedemikian sehingga sistem (1) yang menjadikan sistem (3) stabil.

NOTASI DAN DEFINISI

Skalar $\lambda \in \mathbb{C}$ dikatakan nilai eigen berhingga dari suatu pasangan matriks (E, A) jika $\det(\lambda E - A) = 0$. Himpunan semua nilai eigen berhingga dari (E, A) dinotasikan dengan $\sigma_f(E, A)$. Suatu vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n \backslash \{\mathbf{0}\}$ sedemikian sehingga $(\lambda E - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ disebut sebagai vektor eigen dari (E, A) yang berkaitan dengan nilai eigen λ. Jika E singular dan $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n \backslash \{\mathbf{0}\}$ sedemikian sehingga $E\mathbf{v} = \mathbf{0}$ maka $\mathbf{v}$ disebut sebagai vektor eigen yang berkaitan dengan nilai eigen ∞. Himpunan semua nilai eigen dari (E, A) disebut spectrum dari (E, A), dan dinotasikan dengan $\sigma(E, A)$. Jelas bahwa $\sigma(E, A) = \sigma_f(E, A) \cup \{\infty\}$ [6].

Untuk sebarang matriks $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, eksponensial dari matriks At, $t \in \mathbb{R}$, didefinisikan sebagai

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k \frac{t^k}{k!}.$$

Invers Drazin dari $E \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, dinyatakan dengan E^D, adalah matriks yang memenuhi ketiga kondisi berikut:

1. $EE^D = E^D E$,
2. $E^D E E^D = E^D$
3. $E^D E^{q+1} = E^q$

dimana q adalah indeks dari E.

SUATU KRITERIA STABILISASI SISTEM DESKRIPTOR LINIER KONTINU REGULAR

Lemma 1. [4,5] *Misal* $E, A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *memenuhi* $EA = AE$ *dan* $\ker(A) \cap \ker(E) = \{\mathbf{0}\}$, *maka* $(I - EE^D)AA^D = I - EE^D$.

Teorema 2. [6] *Misalkan pasangan matriks* (E, A) *dengan* $E, A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *adalah regular,* $\mathrm{ind}(E) = q$, *dan* $EA = AE$. *Solusi sistem (1) adalah*

$$\mathbf{x}(t) = e^{E^D At} E^D E\mathbf{v} + \int_0^t e^{E^D A(t-\tau)} E^D B\mathbf{u}(\tau)d\tau - (I - E^D E)\sum_{i=0}^{q-1} (E^D A)^i A^D B\mathbf{u}^{(i)}(t)$$

untuk suatu $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$.

Dalam [4] dinyatakan bahwa jika kondisi $EA = AE$ tidak terpenuhi untuk sistem deskriptor linier kontinu regular (1), maka solusi sistem tersebut dapat ditentukan dengan menggunakan cara berikut. Kalikan kedua ruas (1) dengan $(\hat{\lambda}E + A)^{-1}$ untuk suatu $\hat{\lambda} \in \mathbb{C}$, maka diperoleh sistem yang ekivalen dengan sistem (1) yaitu

$$\hat{E}\dot{\mathbf{x}}(t) = \hat{A}\mathbf{x}(t) + \hat{B}\mathbf{u}(t)$$

dimana

$$\hat{E} = (\hat{\lambda}E + A)^{-1}E,\ \hat{A} = (\hat{\lambda}E + A)^{-1}A,\ \hat{B} = (\hat{\lambda}E + A)^{-1}B.$$

Lemma 3. [7] *Misalkan* $E, A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, *maka*

1. $AE = EA$
2. $\ker(\hat{A}) \cap \ker(\hat{E}) = \{\mathbf{0}\}$.

Definisi 4. [1,2] *Sistem (1) dikatakan stabil jika terdapat skalar* $\alpha, \beta > 0$ *sedemikian sehingga jika* $\mathbf{u}(t) = \mathbf{0}$ *untuk* $t > 0$, *maka* $\mathbf{x}(t)$ *memenuhi*

$$\|\mathbf{x}(t)\|_2 \le \alpha e^{-\beta t}\|\mathbf{x}(0)\|_2,\ t > 0.$$

Definisi tersebut bermakna bahwa jika sistem (1) adalah stabil dan $\mathbf{u}(t) = \mathbf{0}$, maka $\lim_{t\to\infty} \mathbf{x}(t) = 0$.

Teorema 5. [1,2,6] *Sistem (1) adalah stabil jika*

$$\sigma_f(E, A) \subset \mathbb{C}_-.$$

Adakalanya sistem (1) tidak stabil. Dalam [2] dinyatakan bahwa sistem deskriptor linier kontinu yang tidak stabil dapat distabilkan dengan menggunakan kontrol *feedback*,

$$\mathbf{u}(t) = K\mathbf{x}(t) + \mathbf{w}(t) \tag{4}$$

dimana $K \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ dan $\mathbf{w}(t) \in \mathbb{R}^m$. Dengan menggunakan kontrol *feedback* (4), maka sistem (1) dapat ditulis menjadi

$$E\dot{\mathbf{x}}(t) = (A + BK)\mathbf{x}(t) + B\mathbf{w}(t) \tag{5}$$

Sistem (5) disebut juga sebagai sistem loop tertutup [1,2].

Definisi 6. *Sistem (1) dikatakan dapat distabilkan (**stabilizable**) jika ada suatu kontrol feedback (4) sedemikian sehingga sistem loop tertutup (5) adalah stabil.*

Kriteria berikut dapat digunakan untuk menentukan apakah suatu sistem deskriptor stabil atau tidak.

Teorema 7. *Sistem regular (1) dapat distabilkan jika dan hanya jika*

$$\operatorname{rank}[sE + A|B] = n, \forall\, s \in \mathbb{C}_+.$$

Sebagai contoh, diberikan suatu sistem deskriptor linier kontinu regular berikut.

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}\mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\mathbf{u}(t). \tag{6}$$

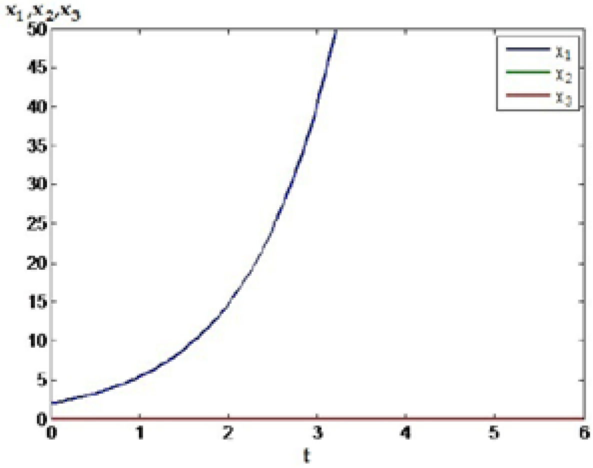
Akan ditunjukkan sistem (6) dapat distabilkan dengan menggunakan Teorema 7. Nilai eigen dari pasangan matriks (E, A) adalah 1. Jelas bahwa sistem tidak dapat stabil karena memiliki bagian riil nilai eigen yang positif. Solusi sistem tersebut dapat diperoleh sebagai berikut.

$$\mathbf{x}(t) = \mathrm{e}^{E^D A t}E^D E\mathbf{v} + \int_0^t \mathrm{e}^{E^D A(t-\tau)}E^D B\mathbf{u}(\tau)d\tau - (I - E^D E)\sum_{i=0}^{q-1}(EA^D)^i A^D B\mathbf{u}^{(i)}(t)$$

$$= \begin{bmatrix}\mathrm{e}^t&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\0\\0\end{bmatrix} + \int_0^t \left(\begin{bmatrix}\mathrm{e}^{(t-\tau)}&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\mathbf{u}(\tau)\right)d\tau - \mathbf{0}$$

$$= \begin{bmatrix} 2e^t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \int_0^t \left(\begin{bmatrix} e^{(t-\tau)} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{u}(\tau) \right) d\tau.$$

Jika $\mathbf{u}(t) = \mathbf{0}$, maka grafik solusi sistem (6) diperlihatkan dalam gambar berikut.



Gambar Solusi Sistem (6)

Karena

$$\operatorname{rank}(sE + A|B) = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} s+1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & s & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$= 3,$$

untuk setiap $s \in \mathbb{C}_+$, maka (6) dapat distabilkan. Selanjutnya akan dipilih kontrol *feedback* $\mathbf{u}(t) = K\mathbf{x}(t) + \mathbf{w}(t)$ untuk suatu $K \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ dan $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^m$ sedemikian sehingga sistem loop tertutup

$$E\dot{\mathbf{x}}(t) = (A + BK)\mathbf{x}(t) + B\mathbf{w}(t)$$

adalah stabil. Pilih $K = [-3 \quad 0 \quad 0]$, maka diperoleh sistem loop tertutup sebagai berikut.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{w}(t). \qquad (7)$$

Karena nilai eigen dari pasangan matriks $(E, A + BK)$ adalah -2, maka sistem loop tertutup (7) adalah stabil. Sehingga sistem (6) dapat distabilkan.

Contoh berikut mengilustrasikan untuk sistem deskriptor linier kontinu yang tidak dapat distabilkan.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{u}(t). \qquad (8)$$

Nilai eigen dari pasangan matriks (E, A) adalah -1 dan 1. Jelas bahwa sistem tidak stabil karena memiliki bagian riil nilai eigen yang positif. Karena

$$\mathrm{rank}(sE + A|B) = \mathrm{rank}\begin{pmatrix} s+1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & s-1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\neq 3$$

untuk $s = 1$, maka menurut Teorema 7, sistem (8) tidak dapat distabilkan. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa tidak ada $K \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ yang dapat menstabilkan sistem loop tertutup

$$E\dot{\mathbf{x}}(t) = (A + BK)\mathbf{x}(t) + B\mathbf{w}(t).$$

Misalkan $K = [a \quad b \quad c]$ dimana $a, b, c \in \mathbb{R}$, maka diperoleh sistem loop tertutup sebagai berikut.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b & 1+c \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\mathbf{w}(t). \tag{9}$$

Karena nilai eigen dari pasangan matriks $(E, A + BK)$ adalah -1 dan 1 untuk sebarang $a, b, c \in \mathbb{R}$, jelas bahwa sistem loop tertutup (9) tidak stabil. Sehingga sistem (8) tidak dapat distabilkan.

SARAN

Kajian tentang sistem deskriptor linier kontinu merupakan topik klasik yang telah banyak dibahas oleh peneliti. Namun kajian kestabilan, regularisasi, dan kepositifan terhadap sistem tersebut masih merupakan topik yang masih dikaji dalam berbagai penelitian. Disarankan untuk peneliti selanjutnya dapat membahas tentang sistem deskriptor linier kontinu khususnya kestabilan dalam berbagai kondisi, seperti kriteria lainnya sebagai syarat kondisi suatu kestabilan sistem tersebut.

DAFTAR PUSTAKA

Dai, L. 1989. *Singular Control Systems. Lecture Notes in Control and Information Sciences.* Berlin: Springer.

Duan, D. R. 2010. *Analysis and Design of Descriptor Linear Systems*. New York: Springer.

Herrero, A., A. Ramirez, dan N. Thome. 2010. *Nonnegativity, Stability, and Regularization of Discrete-Time Descriptor Systems*. Elsivier. 432: 837-846.

Kaczorek, T. 1992. *Linear Control Systems, Vol.1*. England: Research Studies Press LTD.

Kunkel, Peter, dan Volker Mehrmann. 2006. *Differential-algebraic Equations. Analysis and Numerical Solution*. Zurich: EMS Publishing House.

Virnik, E. 2008. *Stability Analysis of Positive Descriptor Systems*, Linier Algebra Appl. 429: 2640-2659.